Théorème de Heine pour les groupes topologiques

La mécanique de la preuve présentée ici est inspirée de la preuve topologique du Théorème de Heine dans le cadre des espaces métriques, en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue.
(`https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Heine`)
Dans cette preuve classique, des précautions sont nécessaires dans le choix des rayons des boules (on divise le rayon par deux...) pour garder une "marge de manoeuvre" nécessaire à la conclusion. Cette technique de réduction du rayon n'est évidemment pas possible dans un groupe muni d'une topologie non-métrique : ceci explique l'introduction du Lemme 1 (réduction de voisinage), qui lui sert de substitut.

Définition 1 (Groupe topologique)

On dit que G est un groupe topologique lorsque G est un groupe muni d'une topologie de sorte que les applications

$$\begin{array}{rcl} G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

sont continues.

Définition 2 (Uniforme continuité)

Une application $f : G \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V du neutre e de G tel que, pour tous éléments $x, y \in G$,

$$\text{si} \;\; x \in yV \;\; \text{alors} \;\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 1

L'ensemble $yV = \{yz,\, z \in V\}$ est un voisinage de y.
En effet, on peut écrire $yV = \varphi^{-1}(V)$, où $\varphi : x \mapsto y^{-1}x$ est continue.
L'image réciproque par φ d'un voisinage de e est ainsi un voisinage de $\varphi^{-1}(e) = y$.

Lemme 1 (réduction de voisinage)

Soit G un groupe topologique et V un voisinage ouvert du neutre e de G.
Il existe un voisinage ouvert de e noté $\widetilde{V}$ tel que $\widetilde{V} \subset V$ et : $\forall x, y \in \widetilde{V},\ xy \in V$.

Preuve :

L'application $m : \begin{array}{rcl} G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$ est continue.
On en déduit que $m^{-1}(V)$ est un ouvert de $G \times G$ contenant (e,e). Rappelons qu'un tel ouvert (pour la topologie produit) est une réunion de produits d'ouverts de G. En particulier, il existe U_1, U_2 des ouverts de G tels que $(e,e) \in U_1 \times U_2 \subset m^{-1}(V)$.
Enfin, en posant $\widetilde{V} = U_1 \cap U_2 \cap V$, $\widetilde{V}$ est un ouvert de G contenant e, inclus dans V, et par construction $m(\widetilde{V} \times \widetilde{V}) \subset m(U_1 \times U_2) \subset V$. $\square$

Théorème 1 (de Heine)

Soit G un groupe topologique compact et $f : G \to \mathbb{R}$ une application continue.
Alors f est uniformément continue.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On cherche à construire V, voisinage de e de sorte que

$$\forall x, y \in G, \quad x \in yV \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $y \in G$. Puisque f est continue en y, on peut introduire un voisinage ouvert U_y de y tel que

$$\forall x \in G, \quad x \in U_y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

En notant $V_y = y^{-1}U_y$ et en raisonnant comme dans la remarque 1, on constate facilement que V_y est un voisinage ouvert de e. On a $U_y = yV_y$, donc l'affirmation précédente peut se ré-écrire :

$$\forall x \in G, \quad x \in yV_y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après le Lemme, on introduit $\widetilde{V}_y$ voisinage ouvert de e, tel que $\widetilde{V}_y \subset V_y$ et : $\forall x, y \in \widetilde{V}_y, xy \in V_y$. On note également $\widetilde{U}_y = y\widetilde{V}_y$, de sorte que $\widetilde{U}_y \subset U_y$.

On a évidemment l'inclusion $G \subset \bigcup\limits_{y \in G} \widetilde{U}_y$. Par compacité de G (propriété de Borel-Lebesgue) on peut extraire de ce recouvrement d'ouvert un recouvrement fini : on introduit $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ tels que $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \widetilde{U}_{y_i}$. Posons alors $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widetilde{V}_{y_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} y_i^{-1}\widetilde{U}_{y_i}$: c'est un voisinage ouvert de e (comme intersection finie de voisinages ouverts).

Vérifions que ce voisinage V convient pour obtenir la conclusion souhaitée.

Soient $x, y \in G$ tels que $x \in yV$.

- D'une part, puisque $y \in G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \widetilde{U}_{y_i}$, on peut introduire un $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $y \in \widetilde{U}_{y_k}$.

En particulier, on a $y \in U_{y_k}$ et donc d'après $(\star)$, $|f(y) - f(y_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

- D'autre part, on sait que $x \in yV$ et que $y \in \widetilde{U}_{y_k} = y_k\widetilde{V}_{y_k}$.

On peut ainsi écrire $x = yv$ et $y = y_k u$ avec $v \in V$ et $u \in \widetilde{V}_{y_k}$.
Ceci nous amène à $x = y_k uv$ et puisque $u, v \in \widetilde{V}_{y_k}$ (car $V \subset \widetilde{V}_{y_k}$) on sait que $uv \in V_{y_k}$.
On a donc obtenu $x \in y_k V_k$, c'est à dire $x \in U_{y_k}$ et donc d'après $(\star)$, $|f(x) - f(y_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

- On conclut que $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(y) - f(y_k)| + |f(x) - f(y_k)| < \varepsilon$, d'où le résultat !

$\square$