Problème de Bâle - Mangoli $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$

Contexte historique

• En $\boxed{\textbf{1644}}$, le jeune italien $\boxed{\textbf{Pietro Mangoli}}$ s'intéresse aux sommes infinies du type

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+p)} \text{ avec } p \in \mathbb{N} .$$

Par exemple, pour $p = 1$ en notant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on déduit par télescopage que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

ce qui montre la convergence de la série et donne la valeur $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

De même, il détermine la valeur de la somme lorsque $p \in [\![1, 10]\!]$, mais ne parvient pas à conclure pour le cas $p = 0$, c'est à dire pour $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

• Ce problème gagne en notoriété en $\boxed{\textbf{1689}}$ lorsque le suisse $\boxed{\textbf{Jakob Bernoulli}}$ y fait allusion de nouveau dans son traité complet sur les séries infinies, se trouvant lui-même incapable de déterminer la valeur exacte de la somme. On baptise alors le problème "Problème de Bâle", du nom de la ville où est né et vit Jakob Bernoulli.

• La lenteur de la convergence de la suite des sommes partielles $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ vers sa limite complique la recherche d'une valeur approchée de celle-ci, ce qui rend délicates et douteuses les conjectures quand à la valeur exacte. Par exemple,

$$S_{1000} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} \simeq 1,643935$$

n'est juste que jusqu'à la deuxième décimale ! (puisque $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,644934$).

En $\boxed{\textbf{1731}}$, $\boxed{\textbf{Leonhard Euler}}$ (dont Bâle est également la ville natale !) relie astucieusement la série étudiée à une autre, $\sum \frac{1}{n^2 2^{n-1}}$, dont la convergence est largement plus rapide.
Ceci lui permet de calculer sans difficulté les 20 premières décimales.

• Finalement, en $\boxed{\textbf{1735}}$, Euler annonce avoir déterminé la valeur exacte de la somme : $\dfrac{\pi^2}{6}$.
Il accompagne cette affirmation d'une démonstration éclairante (mais pas tout à fait rigoureuse).
Il proposera une autre démonstration plus solide en 1741.

Preuve originale d'Euler (1735)

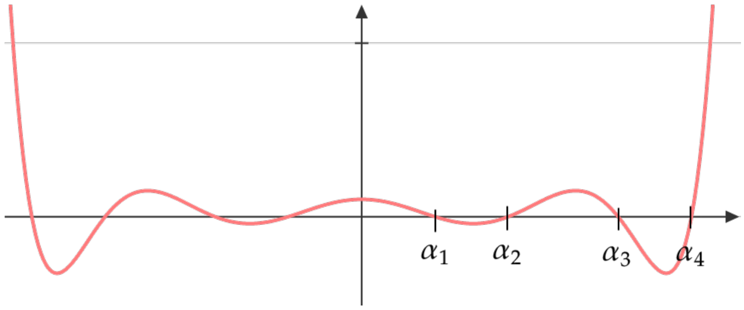
Partie I - Factorisation d'un polynôme pair à racines simples

On considère un polynôme P satisfaisant les hypothèses suivantes :

$\boxed{1}$ P est un polynôme pair (i.e $P(-x) = P(x)$) de degré $2n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{2}$ $P(0) = 1$

$\boxed{3}$ P admet n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$.



D'après $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, P s'écrit sous forme développée : $\boxed{P(x) = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2n}x^{2n}}$.

Par ailleurs, puisque P est pair, les réels $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$ sont également racines de P.
P admet donc les $2n = \deg(P)$ racines distinctes $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots, \pm\alpha_n$. Il se factorise ainsi en

$$P(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x + \alpha_1)(x - \alpha_2)(x + \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)(x + \alpha_n)$$

c'est à dire

$$P(x) = \lambda(x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2)\ldots(x^2 - \alpha_n^2) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{(coeff. dominant de } P\text{)}.$$

L'égalité $P(0) = 1$ donne ensuite

$$\lambda(-\alpha_1^2)(-\alpha_2^2)\ldots(-\alpha_n^2) = 1 \iff \lambda = \frac{1}{(-\alpha_1^2)(-\alpha_2^2)\ldots(-\alpha_n^2)}$$

et donc en remplaçant,

$$P(x) = \frac{(x^2 - \alpha_1^2)}{-\alpha_1^2}\frac{(x^2 - \alpha_2^2)}{-\alpha_2^2}\ldots\frac{(x^2 - \alpha_n^2)}{-\alpha_n^2}$$

d'où finalement la factorisation : $\boxed{P(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_n^2}\right)}$.

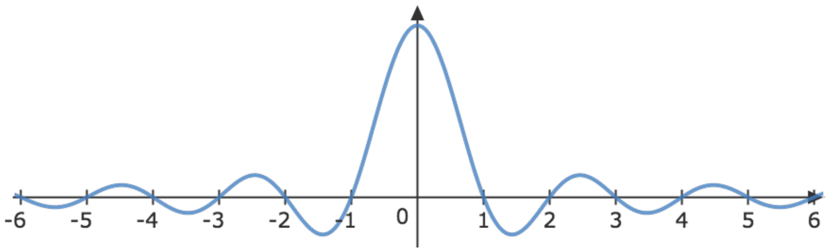
Enfin, en développant ce produit, on constate facilement que le coefficient devant x^2 est :

$$-\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} - \ldots - \frac{1}{\alpha_n^2}.$$

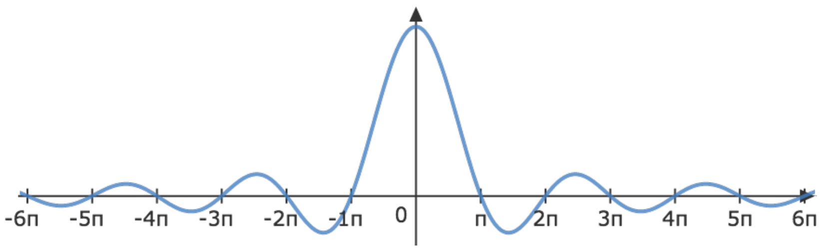
Par ailleurs, le coefficient devant x^2 est a_2, d'où l'égalité : $\boxed{\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n^2} = -a_2}$

Cette dernière égalité fait fortement penser au problème de Bâle !
On cherche ainsi un polynôme pair dont les racines positives seraient $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ etc.
(avec, du coup, une infinité de racines, donc pas vraiment un polynôme !...)

Graphiquement et grossièrement, cela donnerait :



Ce genre "d'oscillations" n'est pas sans évoquer les **fonctions trigonométriques** sin et cos...
D'ailleurs en étirant ce graphe d'un facteur π, on obtient :



...qui est en fait le graphe de la fonction sinus cardinal : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Partie II - La fonction sin est "presque" un polynôme...

Partons du développement de l'exponentielle en série entière, que l'on suppose connu :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Pour faire le lien avec les fonctions trigonométriques, on dispose de la formule d'Euler (encore lui !) :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \quad \text{où } i^2 = -1.$$

En injectant $x = i\theta$ dans le développement :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos(\theta)} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

En identifiant la partie imaginaire, on obtient le développement de sin :

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

D'après l'étude menée en partie I, on voudrait un "polynôme" pair et tel que $P(0) = 1$.

On va donc plutôt considérer : $\boxed{\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \dots}$

Partie III - Extrapolation

On s'intéresse à la fonction définie par $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \dots}$

Bien-sûr, il ne s'agit pas d'un vrai polynôme, car cette somme est infinie !
Admettant quand même que le raisonnement de la Partie I tient toujours, qu'obtient-on alors ?

On sait que sin s'annule en $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ etc. f admet donc les "racines" $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3/\pi$ etc.

D'où la factorisation de la partie I : $\boxed{f(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{(3\pi)^3}\right)\dots}$ (produit infini)

En développant ce produit, on constate que le coefficient devant x^2 est : $-\dfrac{1}{\pi^2} - \dfrac{1}{(2\pi)^2} - \dfrac{1}{(3\pi)^2}\dots$

Par ailleurs, le coefficient devant x^2 dans $f(x)$ est $-\dfrac{1}{3!} = -\dfrac{1}{6}$. On en déduit donc l'égalité :

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} = -\frac{1}{6} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6} \iff \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}$$

et donc pour conclure : $\boxed{\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$.