Preuve "élémentaire" du TCL pour une loi de Bernoulli

Avril 2024

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.
Pour tout $k \geqslant 1$, on a ainsi $m = E(X_k) = \frac{1}{2}$ et $\sigma^2 = V(X_k) = \frac{1}{4}$.

On cherche à démontrer dans ce cas très particulier, de manière élémentaire, la convergence en loi annoncée par le **Théorème Central Limite** :

$$\text{En notant, pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{2}\right),$$

$$\text{on a la convergence : } \quad Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{en loi}} Z \quad \text{où } Z \text{ suit la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}(0,1).$$

On va ici démontrer ce résultat avec pour seul pré-requis la **formule de Stirling pour $n!$**
(on découvre au passage que le $\sqrt{2\pi}$ qui apparait dans la distribution normale est "le même" que celui de Stirling...)
et le **développement limité à l'ordre 2 de** $\ln(1+x)$.

Introduisons $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ de sorte que $Z_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(B_n - \dfrac{n}{2}\right)$ et B_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Le support de la variable aléatoire B_n étant $[\![0,n]\!]$, celui de Z_n est l'ensemble $E_n = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(k - \dfrac{n}{2}\right),\, k \in [\![0,n]\!]\right\}$.

Lorsque n est grand, on s'attend à ce que la loi de Z_n, c'est à dire la donnée des probabilités $\Big(P(Z_n = x_n)\Big)_{x_n \in E_n}$, "ressemble" à la distribution normale $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ceci est illustré par le résultat suivant :

Théorème 1 (Limite des probabilités "ponctuelles")

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée avec $x_n \in E_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors, en notant $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$P(Z_n = x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot f(x_n).$$

Preuve :

Pour tout $n \geqslant 1$, puisque $x_n \in E_n$, on peut écrire $x_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(k_n - \dfrac{n}{2}\right)$ pour un certain $k_n \in [\![0,n]\!]$. Précisément :

$$k_n = \frac{n}{2} + \frac{x_n}{2}\sqrt{n}. \tag{1}$$

On a ainsi, avec les notations introduites précédemment,

$$P(Z_n = x_n) = P\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\left(B_n - \frac{n}{2}\right) = x_n\right) = P(B_n = k_n) = \binom{n}{k_n}\frac{1}{2^n} = \frac{n!}{(k_n)!(n-k_n)!} \cdot \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

puisque B_n suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ étant bornée, le développement (1) garantit que

$$k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \to +\infty \text{ et } n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \to +\infty.$$

On dispose donc des équivalents donnés par la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
n! &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \\
k_n! &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot (k_n)^{k_n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k_n} \\
(n-k_n)! &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot (n-k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(n-k_n)}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2) et en simplifiant, on obtient ainsi

$$P(Z_n = x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(k_n)^{k_n+\frac{1}{2}}(n-k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $(k_n)^{k_n+\frac{1}{2}} = (k_n)^{k_n}(k_n)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (k_n)^{k_n}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ et de même $(n-k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-k_n)^{n-k_n}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient l'équivalent

$$P(Z_n = x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\cdot n^n}{(k_n)^{k_n}(n-k_n)^{n-k_n}} \cdot \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot R_n$$

où $R_n = \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{(k_n)^{k_n}(n-k_n)^{n-k_n}}$. Exprimons à présent $\ln(R_n)$:

$$\begin{aligned}
\ln(R_n) &= n\ln\left(\frac{n}{2}\right) - k_n\ln(k_n) - (n-k_n)\ln(n-k_n)\\
&= n\ln\left(\frac{n}{2}\right) - k_n\left(\ln\left(\frac{n}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}k_n\right)\right) - (n-k_n)\left(\ln\left(\frac{n}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}(n-k_n)\right)\right)\\
&= -k_n\ln\left(\frac{2}{n}k_n\right) - (n-k_n)\ln\left(\frac{2}{n}(n-k_n)\right).
\end{aligned}$$

En revenant au développement (1) de k_n, on obtient :

$$\ln(R_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right)\ln\left(1 + \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{n}{2} - \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right)\ln\left(1 - \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right).$$

On applique enfin le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, la suite $(x_n)_{n\geqslant1}$ étant bornée :

$$\begin{aligned}
\ln(R_n) &\underset{n\to+\infty}{=} -\left(\frac{n}{2} + \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right)\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}} - \frac{x_n^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{n}{2} - \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right)\left(-\frac{x_n}{\sqrt{n}} - \frac{x_n^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(-\sqrt{n}\frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{4} - \frac{x_n^2}{2} + o(1)\right) + \left(\sqrt{n}\frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{4} - \frac{x_n^2}{2} + o(1)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x_n^2}{2} + o(1).
\end{aligned}$$

Ceci garantit que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$, d'où le résultat voulu.

□

En étant un peu plus précis dans la preuve, on peut en réalité montrer que la convergence du théorème précédent est "uniforme sur tout compact" au sens suivant.

Théorème 2 (Limite uniforme sur tout compact)

Pour tous réels a, b tels que $a < b$, on a la convergence :

$$\sup_{x_n\in E_n\cap[a,b]} \left|\frac{\sqrt{n}}{2}P\Big(Z_n = x_n\Big) - f(x_n)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve :

On reprend les notations précédentes : si $x_n \in E_n$, on peut écrire $x_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(k_n - \dfrac{n}{2}\right)$, avec $k_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{x_n}{2}\sqrt{n}$. Lorsque $x_n \in [a,b]$, on a ainsi les encadrements

$$\frac{n}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{n} \leqslant k_n \leqslant \frac{n}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{n} \quad \text{et} \quad \frac{n}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{n} \leqslant n-k_n \leqslant \frac{n}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{n}. \tag{3}$$

Afin de simplifier les notations dans la suite, pour toute expression A_n dépendant de x_n, on notera

$$\|A_n\| = \sup_{x_n\in E_n\cap[a,b]} |A_n|.$$

Comme dans la preuve précédente, on a d'abord

$$P(Z_n = x_n) = \frac{n!}{(k_n)!(n-k_n)!} \cdot \frac{1}{2^n} \tag{4}$$

La formule de Stirling peut s'écrire :

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \Theta(n), \quad \text{où } \Theta(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On a donc de même

$$(k_n)! = \sqrt{2\pi} \cdot (k_n)^{k_n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k_n} \cdot \Theta(k_n) \quad \text{et} \quad (n-k_n)! = \sqrt{2\pi} \cdot (n-k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(n-k_n)} \cdot \Theta(n-k_n)$$

et en remplaçant, (4) devient :

$$P(Z_n = x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(k_n)^{k_n+\frac{1}{2}}(n-k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\Theta(n)}{\Theta(k_n)\Theta(n-k_n)}. \tag{5}$$

On note que puisque $\Theta(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, les encadrements (3) permettent facilement d'affirmer que

$$\|\Theta(k_n) - 1\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\Theta(n-k_n) - 1\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ensuite, on peut écrire $(k_n)^{k_n+\frac{1}{2}} = (k_n)^{k_n} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_n$ et $(n-k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} = (n-k_n)^{n-k_n} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mu_n$, où

$$\lambda_n = \left(\frac{k_n}{n/2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \mu_n = \left(\frac{n-k_n}{n/2}\right)^{1/2}.$$

A nouveau, les encadrements (3) permettent d'affirmer que

$$\|\lambda_n - 1\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\mu_n - 1\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En remplaçant, (5) devient :

$$P(Z_n = x_n) = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot R_n \cdot \frac{\Theta(n)}{\Theta(k_n)\Theta(n-k_n)} \cdot \frac{1}{\lambda_n \mu_n}, \tag{6}$$

où, comme précédemment, $R_n = \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{(k_n)^{k_n}(n-k_n)^{n-k_n}}$. On a déjà vu que

$$\ln(R_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right) \ln\left(1 + \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{n}{2} - \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right) \ln\left(1 - \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right).$$

On applique ensuite $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, ce qui donne :

$$\ln(R_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right)\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}} - \frac{x_n^2}{2n} + \frac{x_n^2}{n}\varepsilon\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)\right) - \left(\frac{n}{2} - \frac{x_n}{2}\sqrt{n}\right)\left(-\frac{x_n}{\sqrt{n}} - \frac{x_n^2}{2n} + \frac{x_n^2}{n}\varepsilon\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Puisque $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a sans problème $\left\|\varepsilon\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En développant ces produits et en simplifiant comme dans la preuve précédente, on obtiendra alors :

$$\ln(R_n) = -\frac{x_n^2}{2} + \Lambda_n, \quad \text{avec} \quad \|\Lambda_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $R_n = e^{-\frac{x_n^2}{2}} e^{\Lambda_n}$, et donc en revenant à (6), on obtient finalement :

$$P(Z_n = x_n) = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot f(x_n) \cdot A_n, \quad \text{où } A_n = \frac{\Theta(n)}{\Theta(k_n)\Theta(n-k_n)} \cdot \frac{e^{\Lambda_n}}{\lambda_n \mu_n}.$$

Pour conclure, on en déduit que

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{2} P\Big(Z_n = x_n\Big) - f(x_n)\right| = \Big|(A_n - 1)\, f(x_n)\Big|,$$

et donc, avec $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\frac{\sqrt{n}}{2} P\Big(Z_n = x_n\Big) - f(x_n)\right\| \leqslant \|A_n - 1\|.$$

Puisque $\Theta(n) \to 1$, $\|\Theta(k_n) - 1\| \to 0$, $\|\Theta(n-k_n) - 1\| \to 0$, $\|\lambda_n - 1\| \to 0$, $\|\mu_n - 1\| \to 0$ et $\|\Lambda_n\| \to 0$, on déduit sans difficulté que $\|A_n - 1\| \to 0$, ce qui conclut la preuve. $\square$

On peut à présent déduire de la convergence des probabilités "ponctuelles" le vrai résultat de convergence en loi annoncé par le Théorème Central Limite.

Théorème 3 (Convergence en loi)

Pour tous réels a, b tels que $a < b$, on a la convergence :

$$P\Big(Z_n \in [a,b]\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\Big(Z \in [a,b]\Big) = \int_a^b f(x)dx.$$

Preuve :

Soit $n \geqslant 1$. Rappelons que le support de Z_n est $E_n = \left\{ \frac{2}{\sqrt{n}}\left(k - \frac{n}{2}\right), k \in [\![0,n]\!] \right\}$.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, notons $x_n^k = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(k - \frac{n}{2}\right) \in E_n$, et considérons ceux qui appartiennent au segment $[a,b]$.

On introduit $i_n, j_n \in [\![0,n]\!]$ de sorte que

$$E_n \cap [a,b] = \left\{ x_n^k,\ k \in [\![i_n, j_n]\!] \right\} \quad \left(\text{en fait on a facilement } i_n = \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{n} \right\rceil \text{ et } j_n = \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{n} \right\rfloor \right).$$

On a ainsi :

$$\forall k \in [\![i_n, j_n - 1]\!],\ x_n^{k+1} - x_n^k = \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad a \leqslant x_n^{i_n} \leqslant a + \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad b - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant x_n^{j_n} \leqslant b, \qquad j_n - i_n \leqslant \frac{b-a}{2}\sqrt{n}.$$

En notant toujours la densité normale $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on peut alors décomposer :

$$P\Big(Z_n \in [a,b]\Big) = \sum_{k=i_n}^{j_n} P\Big(Z_n = x_n^k\Big)$$

$$P\Big(Z \in [a,b]\Big) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_n^{i_n}} f(x)dx + \sum_{k=i_n}^{j_n-1} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} f(x)dx + \int_{x_n^{j_n}}^b f(x)dx.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left| P\Big(Z_n \in [a,b]\Big) - P\Big(Z \in [a,b]\Big) \right| \leqslant \underbrace{\int_a^{x_n^{i_n}} f(x)dx}_{\boxed{1}} + \underbrace{\sum_{k=i_n}^{j_n-1} \left| P\Big(Z_n = x_n^k\Big) - \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} f(x)dx \right|}_{\boxed{2}} + \underbrace{\left| P\Big(Z_n = x_n^{j_n}\Big) - \int_{x_n^{j_n}}^b f(x)dx \right|}_{\boxed{3}}.$$

- Puisque $(x_n^{i_n} - a) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$ et $|f(x)| \leqslant 1$ on a la majoration : $\boxed{1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$.
- Majorons à présent $\boxed{2}$. Pour tout $k \in [\![i_n, j_n - 1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\left| P\Big(Z_n = x_n^k\Big) - \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} f(x)dx \right| &\leqslant \left| P\Big(Z_n = x_n^k\Big) - \frac{2}{\sqrt{n}} f(x_n^k) \right| + \left| \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} f(x)dx - \frac{2}{\sqrt{n}} f(x_n^k) \right| \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \left| \frac{\sqrt{n}}{2} P\Big(Z_n = x_n^k\Big) - f(x_n^k) \right| + \left| \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} (f(x) - f(x_n^k))dx \right| \\
&\leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \left| \frac{\sqrt{n}}{2} P\Big(Z_n = x_n^k\Big) - f(x_n^k) \right| + \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} |f(x) - f(x_n^k)|dx.
\end{aligned}$$

En introduisant la borne supérieure mise en jeu dans le Théorème 2

$$S_n = \sup_{x_n \in E_n \cap [a,b]} \left| \frac{\sqrt{n}}{2} P\Big(Z_n = x_n\Big) - f(x_n) \right|,$$

on peut majorer le premier morceau par $\frac{2}{\sqrt{n}} S_n$. Par ailleurs, puisque $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$,

$$\int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} |f(x) - f(x_n^k)|dx \leqslant \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} (x - x_n^k)dx \leqslant \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \frac{2}{\sqrt{n}} dx = \frac{4}{n}.$$

En sommant pour $k \in [\![i_n, j_n - 1]\!]$, on obtient ainsi :

$$\boxed{2} \leqslant (j_n - i_n)\left(\frac{2}{\sqrt{n}}S_n + \frac{4}{n}\right) \leqslant \frac{b-a}{2}\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}S_n + \frac{4}{n}\right) \leqslant (b-a)S_n + \frac{2(b-a)}{\sqrt{n}}.$$

- Enfin, on a $\boxed{3} \leqslant P\Big(Z_n = x_n^{j_n}\Big) + \displaystyle\int_{x_n^{j_n}}^{b} f(x)dx$. On peut majorer la probabilité avec

$$P\Big(Z_n = x_n^{j_n}\Big) = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}P\Big(Z_n = x_n^{j_n}\Big) - f(x_n^{j_n})\right) + \frac{2}{\sqrt{n}}f(x_n^{j_n}) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}S_n + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

et l'intégrale comme pour $\boxed{1}$: $\displaystyle\int_{x_n^{i_n}}^{b} f(x)dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On conclut que les quantités $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini, d'où le résultat. $\square$